JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 3, 274–292 (1970)

Operatoren vom Bernsteinschen Typ

G. MÜHLBACH

Technische Universität Hannover, Welfengarten 1, West Germany

Communicated by G. Lorentz

Received September 10, 1969

1. Es seien X, $Y \subseteq X$ abgeschlossene Teilintervalle der reellen Geraden $\mathbf{R}$ und E bzw. F Unterräume von $C(X)$ bzw. $C(Y)$. $C(X)$ bezeichne dabei den durch

$$f \leqslant g :\Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

halbgeordneten linearen Raum der auf X stetigen, reellwertigen Funktionen. Die Menge aller linearen bzw. monotonen Operatoren von E in einen halbgeordneten linearen Raum E' bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(E, E')$ bzw. $\mathscr{L}^+(E, E')$.

Im Hinblick auf die bekannten Bernsteinpolynome heiße ein Operator $u \in \mathscr{L}^+(E, F)$ mit den Fixelementen p_0, p_1[1] vom Bernsteinschen Typ.

Besitzt $u \in \mathscr{L}^+(E, F)$ Funktionen $f_0, f_1 \in E$ als Fixelemente, wobei (f_0, f_1) ein Čebyšev-System auf X bildet, wollen wir von einem Operator des verallgemeinerten Bernsteinschen Typs bzgl. (f_0, f_1) sprechen. Dabei wird unter einem Čebyšev-System der Ordnung m auf einer Menge M ein $(m+1)$-tupel $(f_0, \ldots, f_m)$ reellwertiger, auf M definierter Funktionen verstanden, so daß jede Determinante

$$V \begin{vmatrix} f_0, \ldots, f_m \\ x_0, \ldots, x_m \end{vmatrix} := \det f_j(x_i) \neq 0$$

ist, wenn die $x_i \in M$ beliebig, aber paarweise verschieden sind.

In diesem Abschnitt seien von nun an X, $Y \subseteq X$ kompakte Intervalle; (f_0, f_1, f_2) sei ein Čebyšev-System auf X von Funktionen aus E. P. P. Korovkin hat gezeigt, daß das Konvergenzverhalten von Operatoren aus $\mathscr{L}^+(E, F)$ weitgehend festgelegt ist durch ihr Verhalten bzgl. solcher Funktionen. Er bewies den allgemeineren

SATZ 1.1 (P. P. Korovkin [1]). *Es sei für jedes $n \in \mathbf{N}$[2] $\varphi_n \in \mathscr{L}^+(E, \mathbf{R})$ und für ein $\alpha \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n f_j = f_j(\alpha), \qquad (j = 0, 1, 2).$$

[1] Wir benutzen hier und im Folgenden für die Potenzfunktionen $\{x \to x^m\}$ die Bezeichnungen $p_m : p_m(x) = x^m$ $(m = 0, 1, \ldots)$, und zwar ohne Rücksicht auf die unterschiedlichen Definitionsmengen, die immer aus dem Zusammenhang ersichtlich sind.

[2] $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Dann gilt für jedes $f \in E$

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n f = f(\alpha).$$

Ein entsprechender Satz besteht für den Raum C^* der 2π-periodischen, stetigen Funktionen.

Strenge Aussagen über den Approximationsfehler erhält man durch Kombination von (1.1) mit der vornehmlich von T. Popoviciu [2*a*, *b*] entwickelten Theorie der bzgl. eines Čebyšev-Systems konvexen Funktionen.

DEFINITION 1.2. $(f_0, ..., f_m)$ sei ein Čebyšev-System auf der Menge M. Die Punkte $x_i \in M (i = 0, ..., m)$ seien paarweise verschieden. f sei eine auf M definierte, reellwertige Funktion. Dann heißt

$$[x_0, ..., x_m; f] := \frac{V\begin{vmatrix} f_0, ..., f_{m-1}, f \\ x_0, ..., x_{m-1}, x_m \end{vmatrix}}{V\begin{vmatrix} f_0, ..., f_{m-1}, f_m \\ x_0, ..., x_{m-1}, x_m \end{vmatrix}}$$

dividierte Differenz von f mit den Knoten x_i bzgl. des Čebyšev-Systems $(f_0, ..., f_m)$. Eine Funktion f heißt bzgl. dieses Systems streng konvex, konvex, konkav, streng konkav auf M, je nachdem stets

$$[x_0, ..., x_m; f] > 0, \geqslant 0, \leqslant 0, < 0$$

ist für alle paarweise verschiedenen Knoten $x_i \in M$.

SATZ 1.3 (T. Popoviciu [2b, Satz 5, S. 107]). *Es sei $Z \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall, A ein Unterraum von $C(Z)$ und $(f_0, ..., f_m)$ auf Z ein Čebyšev-System von Funktionen aus A. Das Funktional $\rho \in \mathscr{L}(A, \mathbf{R})$ verschwinde nicht überall in A. Genau dann, wenn*

$$\rho f \neq 0$$

ist für jede auf Z bzgl. $(f_0, ..., f_m)$ streng konvexe Funktion $f \in A$, gibt es zu jedem $f \in A$ $m + 1$ paarweise verschiedene Knoten x_i in Z, so daß

$$\rho f = \rho f_m [x_0, ..., x_m; f]$$

ist. Die dividierte Differenz ist bzgl. $(f_0, ..., f_m)$ zu bilden.

Aus (1.1) und (1.3) erhält man

SATZ 1.4. *Gibt es zu $\varphi \in \mathscr{L}^+(E, \mathbf{R})$ ein $\alpha \in X$, so daß $\varphi f_j = f_j(\alpha)$, $(j = 0, 1)$*

ist, existiert zu jedem $f \in E$ ein Tripel paarweise verschiedener Punkte $x_i \in X$, so daß

$$\varphi f - f(\alpha) = \{\varphi f_2 - f_2(\alpha)\} \cdot [x_0, x_1, x_2; f][3]$$

gilt.

Nach (1.1) kann man zum Beweis $\varphi f_2 \neq f_2(\alpha)$ annehmen. Es ist dann $\varphi g \neq g(\alpha)$ für jede auf X bzgl. (f_0, f_1, f_2) streng konvexe Funktion $g \in E$. Denn nimmt man an, für eine solche Funktion wäre $\varphi g = g(\alpha)$, müßte, weil (f_0, f_1, g) auf X wieder ein Čebyšev-System stetiger Funktionen ist, $\varphi f = f(\alpha)$ für jedes $f \in E$ gelten, im Widerspruch zu $\varphi f_2 \neq f_2(\alpha)$. Folglich läßt sich auf das lineare Funktional $\rho \in \mathscr{L}(E, \mathbf{R})$, $\rho f = \varphi f - f(\alpha)$, der Satz 1.3 anwenden.

Eine unmittelbare Folgerung aus (1.4) ist

SATZ 1.5. *Es sei $u \in \mathscr{L}^+(E, F)$ ein Operator des verallgemeinerten Bernsteinschen Typs bzgl. (f_0, f_1). Zu jedem $x \in Y$ gibt es ein Tripel paarweise verschiedener Punkte $x_i \in X$, so daß*

$$r(f, x) = r(f_2, x) \cdot [x_0, x_1, x_2; f][4,5] \tag{1.6}$$

ist.

(1.5) läßt sich erheblich verallgemeinern, denn um aus (1.4) die Gleichung (1.6) zu erhalten, genügt es offensichtlich $u \in \mathscr{L}^+(E, F)$ und $u(f_j, x) = f_j(x)$ $(j = 0{,}1)$ vorauszusetzen. Eine entsprechende Aussage gilt für monotone Abbildungen des Raumes C^* bzgl. eines geeigneten Čebyšev-Systems periodischer Funktionen.

Nach (1.5) sind genau die Nullstellen von rf_2 allgemeine Interpolationsstellen von u, d.h. es ist an einer Stelle $x \in Y$ $r(f, x) = 0$ für jedes $f \in E$ genau dann, wenn $r(f_2, x) = 0$ ist.

Als Beispiele führen wir die "verallgemeinerten Bernsteinpolynome" an. Es sei (α_n), $n = 0, 1, \ldots$, eine wachsende Folge reeller Zahlen, wobei $\alpha_0 = 0$ und $0 < \alpha_1$ gelte. Für $x > 0$ und $0 \leqslant k < n$ wird

$$p^*_{nk}(x) := (-1)^{n-k}\, \alpha_{k+1} \cdot \ldots \cdot \alpha_n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{x^z\, dz}{(z - \alpha_k) \cdots (z - \alpha_n)}$$

definiert und $p^*_{nn}(x) = x^{\alpha_n}$. Dabei ist C ein einfacher, geschlossener, positiv orientierter Integrationsweg, der die Punkte $z = \alpha_k$ im Innern enthält. Man kann leicht zeigen, daß $0 < p^*_{nk}(x) < 1$ und $\sum_0^n p^*_{nk}(x) = 1$ gilt, wenn $0 < x < 1$ ist.

[3] Die dividierte Differenz ist bzgl. (f_0, f_1, f_2) zu bilden.

[4] S. Fußnote 3.

[5] Wir setzen zur Abkürzung $u(f, x) = (uf)(x)$ und $r(f, x) = u(f, x) - f(x)$.

Es sei

$$x_{nk} = \left[\left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_n}\right)\right]^{1/\alpha_1}, \qquad 0 \leqslant k < n, \qquad x_{nn} = 1.$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbf{N}$ durch

$$B_n^*(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_{nk})\, p_{nk}^*(x)$$

eine Abbildung $B_n^* \in \mathscr{L}^+(E, E)$ erklärt mit $E = C[0, 1]$. Jeder Operator B_n^* besitzt zwei Fixelemente, und zwar die Funktionen $f_0 = p_0$ und f_1 mit $f_1(x) = x^{\alpha_1}$. Im Falle $\alpha_k = k$ sind die B_n^* identisch mit den Bernsteinschen Operatoren.

Wählt man $f_2(x) = x^{2\cdot\alpha_1}$, so gibt es zu jedem $f \in E$ und zu jedem $x \in [0, 1]$ ein Tripel von Punkten $x_i \in [0, 1]$, so daß mit $R_n^*(f, x) = B_n^*(f, x) - f(x)$

$$R_n^*(f, x) = R_n^*(f_2, x) \cdot [x_0, x_1, x_2; f]$$

ist, wobei die dividierte Differenz bzgl. (f_0, f_1, f_2) zu bilden ist. Wenn $f \in C^2(0, 1)$[6] ist, gibt es nach einem Satz von *T.* Popoviciu [2*b*, Satz 9, S. 116] zu jedem x einen Punkt ξ im Innern des kleinsten, die Knoten x_i enthaltenden Intervalls, so daß

$$R_n^*(f, x) = R_n^*(f_2, x) \frac{\xi f''(\xi) - (\alpha_1 - 1) f'(\xi)}{2\alpha_1^2 \xi^{2\alpha_1 - 1}}.$$

Andere Beispiele werden durch alle monotonen Operatoren der Fourier-Analysis gegeben, die durch Ausdrücke der folgenden Gestalt definiert sind:

$$l_\rho(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k(\rho)(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1.7}$$

Dabei sind a_k, b_k die Fourier-Koeffizienten von f; ρ ist ein Parameter. Für jedes $x \in \mathbf{R}$ bildet z.B. das Funktionentripel (f_0, f_1, f_2), wobei

$$f_0 = p_0,\ f_1(t) = \sin(t - x),\ f_2(t) = \cos(t - x) \tag{1.8}$$

zu setzen ist und die f_i als Funktionen von t zu betrachten sind, ein Čebyšev-System von Funktionen des Raumes C^*. Jeder Operator l_ρ besitzt f_0 als Fixelement und interpoliert f_1 an der Stelle $x : l_\rho(f_1, x) = 0$, während

[6] Ist $X \subseteq \mathbf{R}$ ein Intervall, wird mit $C^m(X)$, $m = 0, 1, \ldots$, die Menge der Funktionen bezeichnet, die auf X eine stetige m-te Ableitung besitzen.

$l_\rho(f_2, x) = r_1(\rho)$ gilt. Wenn $l_\rho \in \mathscr{L}^+(C^*, G)$, $G = C(Z)$ und Z ein Intervall ist, gibt es für jedes $f \in C^*$ eine Darstellung

$$l_\rho(f, x) - f(x) = (r_1(\rho) - 1) \cdot [x_0, x_1, x_2; f].$$

Die dividierte Differenz ist bzgl. des zugrunde gelegten Čebyšev-Systems (1.8) zu bilden. Vom Typ (1.7) sind z.B. bekannte, von Fejér, de la Vallée-Poussin, Jackson, Korovkin u.a. angegebene Operatoren.

2. In diesem Abschnitt seien X, $Y \subseteq X$ abgeschlossene Intervalle und E ein Unterraum von $C(X)$, der insbesondere die auf X gleichmäßig stetigen Funktionen enthält; $F = C(Y)$.

SATZ 2.1. *Für einen Operator $u \in \mathscr{L}^+(E, F)$ mit dem Fixelement p_0 sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist an der Stelle $x \in Y$ $r(f, x) = 0$ für jede auf X gleichmäßig stetige Funktion f.*

(ii) *Es gibt eine konvexe Funktion $g \in E$, die bei x eine isolierte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel besitzt mit der Eigenschaft: $r(g, x) = 0$.*

Offensichtlich bedarf nur die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) eines Beweises. Man benutzt dazu die Abschätzung

$$|f(t) - f(x)| \leqslant \left(\left[\frac{|t-x|}{\delta}\right] + 1\right) \omega(f, \delta).$$

Sie ist für jedes $\delta > 0$ gültig und mit einem Standard-Verfahren zu beweisen. Hierin bedeuten $[y]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich y ist, und ω den Stetigkeitsmodul von f auf X. Mit $m = \min\{g(x - \delta), g(x + \delta)\} > 0$ gilt

$$\left[\frac{|t-x|}{\delta}\right] \leqslant \frac{1}{m} \cdot g(t)$$

für alle $t \in X$. Aus

$$|r(f, x)| \leqslant \left(\frac{1}{m} u(g, x) + 1\right) \omega(f, \delta)$$

für beliebiges $\delta > 0$ erhält man in der Tat $r(f, x) = 0$.

Nach (2.1) ist für einen Operator $u \in \mathscr{L}^+(E, F)$ des Bernsteinschen Typs ein (endlicher) gemeinsamer Randpunkt von X und Y eine allgemeine Interpolationsstelle für die auf X gleichmäßig stetigen Funktionen.

SATZ 2.2. *Ist $X = [a, b]$ kompakt und $u \in \mathscr{L}^+(E, E)$, $E = C(X)$, ein Operator des verallgemeinerten Bernsteinschen Typs bzgl. (f_0, f_1), so interpoliert u in den Randpunkten von X jedes $f \in E$.*

O.B.d.A. kann f_0 auf X als nullstellenfrei angenommen werden. Durch

$$v(f, x) := \frac{u(f \cdot f_0, x)}{f_0(x)} \tag{2.3}$$

wird ein Operator des verallgemeinerten Bernsteinschen Typs bzgl. $(p_0, f_1/f_0)$ definiert. Es gibt genau eine Linearkombination φ der Funktionen dieses Čebyšev-Systems, die das Interpolationsproblem $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ löst. φ ist auf $(a, b]$ nullstellenfrei. Deshalb kann man ähnlich wie bei Satz (2.1) schließen. Es folgt $v(f, a) = 0$ und hieraus $u(f, a) = f_0(a) \cdot v(f/f_0, a) = 0$ für alle $f \in E$. Ein ähnliches Argument gilt bzgl. b.

SATZ 2.4. *Es seien X, $Y \subseteq X$ abgeschlossene Intervalle. E sei ein Unterraum von $C(X)$, der p_2 und die auf X gleichmäßig stetigen Funktionen enthält. $F' = C^1(Y)$. $u \in \mathscr{L}^+(E, F')$ sei vom Bernsteinschen Typ. Dann gibt es zu jedem $f \in E$ und jedem x aus dem Innern von $X \cap Y$ ein Tripel paarweise verschiedener Punkte $x_i \in X$, so daß*

$$r(f, x) = r(p_2, x) \cdot [x_0, x_1, x_2; f]$$

gilt. Dabei ist $r(p_2, x) \neq 0$. Die dividierte Differenz ist bzgl. des Čebyšev-Systems (p_0, p_1, p_2), d.h. im gewöhnlichen Sinne zu bilden.

Zum Beweis wird gezeigt: Für jedes solche x und jede auf X streng konvexe Funktion $f \in E$ ist $r(f, x) \neq 0$. Dann ist (2.4) eine Folge des Satzes 1.3. Angenommen, es wäre $r(g, x) = 0$ für eine streng konvexe Funktion $g \in E$. Wenn q eine Stützgerade für g im Punkte x bezeichnet, besitzt $g - q$ in x eine isolierte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel. Weiterhin ist $r(g - q, x) = 0$. Nach (2.1) folgt $r(f, x) = 0$ für jede auf X gleichmäßig stetige Funktion f. Durch $\varphi(t) = |t - x|$ wird eine konvexe, gleichmäßig stetige Funktion definiert, die an der Stelle x nicht differenzeirbar ist. Für jedes $t \in Y$ ist $u(\varphi, t) - \varphi(t) \geqslant 0$. Weil $u\varphi$ auf Y differenzierbar ist, kann nicht $u(\varphi, x) = 0$ sein. Dieser Widerspruch zeigt, daß unsere Annahme falsch war.

Als Beispiel seien die durch

$$u_n(f, x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k$$

gegebenen Operatoren betrachtet. Für jede natürliche Zahl n ist

$u_n \in \mathscr{L}^+(E, F)$, unter E einen geeigneten Unterraum von $F = C[0, \infty)$ verstanden, der insbesondere die gleichmäßig stetigen Funktionen aus F enthält. Ein solcher Unterraum E wird z.B. von der Menge derjenigen Funktionen f aus F gebildet, die für $x \to \infty$ einer Wachstumsbedingung der folgenden Form genügen:

2.5. *Zu f gibt es positive Zahlen k, K und C, so daß $|f(x)| \leqslant Cx^k$ für alle $x \geqslant K$ gilt.*

Wegen $u_n p_0$, $u_n p_1 = p_1$ ist für jedes $f \in E$ und jedes $x \in [0, \infty)$

$$u_n(f, x) - f(x) = \frac{x}{n} \cdot [x_0, x_1, x_2; f]$$

mit geeigneten Knoten $x_i \in [0, \infty)$. Diese Restgliedformel läßt sich für Funktionen $f \in E$ aus der Differenzierbarkeitsklasse $C^2(0, \infty)$ vereinfachen zu

$$u_n(f, x) - f(x) = \frac{x}{n} \frac{f''(\xi)}{2};$$

ξ liegt im Innern des kleinsten Intervalls, das die Knoten x_i enthält.

3. Es seien X, $Y \subseteq X$ abgeschlossene Intervalle, E ein Unterraum von $C(X)$ und $F = C(Y)$. (f_0, f_1, f_2) sei ein Čebyšev-System auf X von Funktionen aus E.
Unter einer Opertor-Folge vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ bzgl. (f_0, f_1, f_2) verstehen wir eine Folge (u_n) mit den Eigenschaften:

3.1. *Für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist $u_n \in \mathscr{L}^+(E, F)$ vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ bzgl. (f_0, f_1).*

3.2. *Für jedes x aus dem Innern von Y ist $r_n(f_2, x)$ für unendlich viele $n \in \mathbf{N}$ positiv.*

3.3. *Für jedes x aus dem Innern von Y ist*

$$r_n(f, x) = o[r_n(f_2, x)],\ n \to \infty^7$$

für jede Funktion $f \in E$, die in einer Umgebung von x verschwindet.

Im Falle $f_i = p_i$ $(i = 0, 1, 2)$ sprechen wir einfach von Operator-Folgen des Bernsteinschen Typs. Für sie ist nach P. P. Korovkin [1] (3.3) äquivalent mit (3.4).

[7] $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty$ soll bedeuten: Es gibt eine Folge (c_n) mit $|a_n| \leqslant c_n |b_n|$ für alle n und $\lim c_n = 0$.

3.4. *Für jedes* $x \in \underline{Y}$[8] *gilt: Wenn* $f \in E$ *an der Stelle* x *eine zweite Ableitung besitzt, ist*

$$r_n(f, x) = r_n(p_2, x) \cdot [\tfrac{1}{2}f''(x) + o(1)],\ n \to \infty.$$

In diesem Abschnitt werden Saturationseigenschaften von Operator-Folgen des Bernsteinschen Typs untersucht. Den Ausgangspunkt bildet der folgende

SATZ 3.5. *Es sei* $f \in C[a, b]$. *Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

(i) f *besitzt auf* $[a, b]$ *eine stetige Ableitung* f', *die einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten* M *und dem Exponenten* 1 *auf* $[a, b]$ *genügt; kurz*

$$f' \in \mathrm{lip}_M\, 1 \text{ auf } [a, b].$$

(ii) *Es ist*

$$\left| \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leqslant M$$

gleichmäßig für alle $x, x \pm h \in [a, b]$.

(iii) *Die gewöhnlichen dividierten Differenzen zweiter Ordnung mit paarweise verschiedenen Knoten aus* $[a, b]$ *genügen der Bedingung:*

$$|[x_0, x_1, x_2; f]| \leqslant \frac{M}{2}.$$

Beweis. (a) Die Implikation (i) ⇒ (ii) gilt auf Grund des erweiterten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung.

(b) Den Beweis der Implikation (ii) ⇒ (i) stützen wir auf den folgenden Hilfssatz von A. Zygmund [3, S. 327]:

LEMMA 3.6. *Sei* g *über* (a, b) *im Lebesgueschen Sinne integrabel und endlich,* $f \in C[a, b]$ *und*

$$\bar{D}^2 f(x) \geqslant g(x) \geqslant \underline{D}^2 f(x), \qquad a < x < b,$$

wobei

$$\bar{D}^2 f(x) = \varlimsup_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f(x, h)}{h^2},$$

$$\underline{D}^2 f(x) = \varliminf_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f(x, h)}{h^2}$$

[8] $\underline{Y}$ bezeichne das Innere der Menge Y.

und

$$\Delta^2 f(x, h) = f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)$$

ist. Dann gibt es reelle Zahlen A und B, so daß

$$f(x) = \int_a^x dy \int_a^y g(t)\, dt + Ax + B, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{*}$$

Setzen wir $g_n(x) = n^2 \cdot \Delta^2 f(x, 1/n)$ und $g(x) = \underline{\lim}_{n\to\infty} g_n(x)$, so ist g als limes inferior einer Folge stetiger, durch M beschränkter Funktionen selbst durch M beschränkt und meßbar, also integrabel über (a, b). Offensichtlich ist $\bar{D}^2 f(x) \geqslant g(x) \geqslant \underline{D}^2 f(x)$, $a < x < b$, so daß nach (3.6) die Darstellung (*) besteht. Dann ist f differenzierbar,

$$f'(x) = \int_a^x g(t)\, dt + A, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

und für die Ableitung gilt

$$| f'(x + h) - f'(x) | = \left| \int_x^{x+h} g(t)\, dt \right| \leqslant M \,|\, h \,|$$

für alle Punkte x, $x + h \in [a, b]$.

(c) (iii) $\Rightarrow$ (ii) ist trivial, denn werden die Knoten äquidistant gewählt, folgt $[x - h, x, x + h; f] = 1/2h^2 \cdot \Delta^2 f(x, h)$.

(d) (ii) $\Rightarrow$ (iii) läßt sich indirekt beweisen. Wäre für ein Tripel paarweise verschiedener Knoten aus $[a, b]$ $| [z_0, z_1, z_2; f] | > M/2$, gäbe es einen Punkt ξ im Innern des kleinsten, die Knoten z_i enthaltenden Intervalls und eine positive Zahl h_1, so daß $[\xi - h_1, \xi, \xi + h_1; f] = [z_0, z_1, z_2; f]$ ist, im Widerspruch zur Voraussetzung (ii) [vgl. 2b, S. 112].

LEMMA 3.7. *Es sei $f \in C[a, b]$ und $f' \notin \mathrm{lip}_M 1$ auf $[a, b]$. Dann gibt es ein $K > M$, einen Punkt $\eta \in (a, b)$, eine Umgebung $U_\epsilon(\eta)$ ($\epsilon > 0$) von η und eine Parabel φ, $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, so daß $\varphi(\eta) = f(\eta)$ und*

(i) *$\varphi(x) \leqslant f(x)$ in $U_\epsilon(\eta)$ und $2\alpha \geqslant K$ oder*

(ii) *$\varphi(x) \geqslant f(x)$ in $U_\epsilon(\eta)$ und $2\alpha \leqslant -K$.*

Beweis. Wegen $f' \notin \mathrm{lip}_M 1$ auf $[a, b]$ gibt es ein $K > M$ und Punkte x_0, $x_0 \pm h_0 (h_0 \neq 0)$, so daß

$$\left| \frac{\Delta^2 f(x_0, h_0)}{h_0^2} \right| \geqslant K$$

ist. Es sei φ^*, $\varphi^*(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma^*$, die Parabel, die f an den Stellen $x_i = x_0 + h_0 \cdot \operatorname{sgn} i$ $(i = -1, 0, 1)$ interpoliert: $\varphi^*(x_i) = f(x_i)$. Dann ist

$$\left| \frac{\Delta^2 \varphi^*(x_0, h_0)}{h_0^2} \right| = | \varphi^{*\prime\prime}(\xi)| = | 2\alpha | \geqslant K.$$

Im Falle

(i) $\alpha > 0$ ist durch $\varphi(x) = \varphi^*(x) - \mu_1$, wobei

$$\mu_1 := \max_{|x-x_0| \leqslant h_0} \{\varphi^*(x) - f(x)\} \geqslant 0$$

gesetzt ist, eine Parabel φ mit der Eigenschaft (i) gegeben. μ_1 wird in einem inneren Punkt η von $[x_0 - h_0, x_0 + h_0]$ angenommen, denn im Falle $\mu_1 = 0$ kann $\eta = x_0$ gesetzt werden, sonst gilt $x_0 - h_0 < \eta < x_0 + h_0$ wegen $(\varphi^* - f)(x_0 \pm h_0) = 0$.

Im zweiten Falle

(ii) $\alpha < 0$ genügt $\varphi(x) = \varphi^*(x) + \mu_2$ der gestellten Bedingung,

$$\mu_2 := \max_{|x-x_0| \leqslant h_0} \{f(x) - \varphi^*(x)\} \geqslant 0.$$

Für jeden Operator des Bernsteinschen Typs $u \in \mathscr{L}^+(E, F)$ $(E = C(X)$, $F = C(Y)$, X und $Y \subseteq X$ kompakte Intervalle) folgt nach (1.5) und (3.5) aus $f' \in \operatorname{lip}_M 1$ auf X

$$| r(f, x)| \leqslant \frac{M}{2} r(p_2, x)$$

für alle $x \in Y$. Diese Abschätzung ist in dem Sinne scharf, als es Funktionen $f \in E$ gibt, für die das Gleichheitszeichen gilt. Betrachtet man Operator-Folgen des Bernsteinschen Typs, ist sie auch in einem anderen Sinne nicht zu verbessern. Wenn diese Ungleichung für alle Operatoren einer Folge des Bernsteinschen Typs gilt, folgt umgekehrt $f' \in \operatorname{lip}_M 1$ auf Y.

SATZ 3.8. *Es seien* $X = [a, b]$, $Y = [c, d] \subseteq X$ *kompakte Intervalle,* $E = C(X), F = C(Y)$. *Es sei* (u_n), $u_n \in \mathscr{L}^+(E, F)$, *eine Operator-Folge des Bernsteinschen Typs.*

(a) *Wenn bzgl.* $f \in E$ *für (fast*[9]*) alle* $n \in \mathbf{N}$

$$| r_n(f, x)| \leqslant M \cdot r_n(p_2, x)$$

gilt für alle $x \in Y$, *besitzt* f *eine stetige Ableitung* $f' \in \operatorname{lip}_{2M} 1$ *auf* Y.

[9] D.h. alle bis auf endlich viele.

(b) *Wenn bzgl.* $f \in E$ *für alle* $n \in \mathbf{N}$

$$| r_n(f, x)| \leqslant m_n r_n(p_2, x)$$

für alle $x \in Y$ *und* $\underline{\lim}_{n\to\infty} m_n = 0$ *gilt, ist* f *linear auf* Y, d.h.

$$f(x) = Ax + B, \qquad x \in Y,$$

mit geigneten reellen Zahlen A *und* B.

Der Beweis wird indirekt geführt. Wäre $f' \notin \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ auf Y, gäbe es nach Lemma 3.7 Zahlen $K > 2M$, $\eta \in (c, d)$, eine Umgebung $U_\epsilon(\eta)$ und eine Parabel φ, $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, so daß $f(\eta) = \varphi(\eta)$ und

(i) $\varphi(x) \leqslant f(x)$ in $U_\epsilon(\eta)$ und $2\alpha \geqslant K$, oder

(ii) $\varphi(x) \geqslant f(x)$ in $U_\epsilon(\eta)$ und $2\alpha \leqslant -K$ ist.

Durch Addition geeigneter Funktionen $\psi_i \in E$ ($i = 1, 2$), die in $U_\epsilon(\eta)$ verschwinden, kann erreicht werden, daß im Falle (i)

$$\psi_1 + \varphi \leqslant f$$

und im Falle (ii)

$$\psi_2 + \varphi \geqslant f$$

ist in der Halbordnung von E. Hieraus folgt im ersten Fall für alle $n \in \mathbf{N}$ allein aus der Monotonie der betrachteten Operatoren

$$r_n(\psi_1, \eta) + r_n(\varphi, \eta) \leqslant r_n(f, \eta). \tag{3.9}$$

Nun ist $r_n(\varphi, \eta) = \alpha r_n(p_2, \eta)$, $r_n(\psi_1, \eta) = o[r_n(p_2, \eta)]$, $n \to \infty$, und nach Voraussetzung $r_n(f, \eta) \leqslant M \cdot r_n(p_2, \eta)$ für (fast) alle n, so daß (3.9) wegen $\alpha > M$ einen Widerspruch enthält. Analog kommt man im Fall (ii) auf einen Widerspruch.

Um (b) zu beweisen, wählen wir eine Teilfolge (m_{n_k}) mit $\lim m_{n_k} = 0$ und betrachten die Operatorfolge (u_{n_k}) vom Bernsteinschen Typ. Gemäß (a) ist $f' \in \mathrm{lip}_{2\epsilon}\, 1$ auf Y für beliebiges $\epsilon > 0$, also f' konstant auf Y.

Ist z.B. bekannt, daß für $f \in C[0, 1]$ bei Interpolation mit stetigen Streckenzügen bzgl. der äquidistanten Knoten $x_{ni} = i/n$ $(i = 0,..., n)$ (fast) alle Fehlerfunktionen $r_n f$ den Ungleichungen

$$-M\left(x - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i+1}{n} - x\right) \leqslant r_n(f, x) \leqslant M\left(x - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{i+1}{n} - x\right),$$
$$\frac{i}{n} \leqslant x \leqslant \frac{i+1}{n}, \qquad i = 0,..., n-1,$$

genügen, folgt $f' \in \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ auf [0, 1].

In den Anwendungen weitreichender ist der folgende

SATZ 3.10. *Es sei* $E = C[a, b]$ *(*$E = C^*$ *bzw.* E *ein geeigneter Unterraum von* $C(X)$ *—*X *ein abgeschlossenes, unbeschränktes Intervall — der die Funktionen* p_i $(i = 0, 1, 2)$ *enthält und mit je zwei Funktionen* f, g *auch deren Maximum* $\max(f, g)$ *und Minimum* $\min(f, g)$*). Ferner sei* $F = C[c, d]$, *wobei* $[c, d]$ *ein kompaktes Teilintervall bzw. von* $[a, b]$, $\mathbf{R}$, X *ist, das nicht nur aus einem Punkt besteht.* (u_n) *sei eine Folge von Operatoren aus* $\mathscr{L}^+(E, F)$, *für die ein* "Voronowskaja-Theorem" *in der folgenden Form gilt*:

Es gibt eine Zahlenfolge (β_n), $\beta_n > 0$, *und eine Funktion* $s \in F$, $s(x) > 0$ *für* $c < x < d$, *so daß für jedes* $f \in E$ *und jedes* $x \in (c, d)$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n r_n(f, x) = s(x) \frac{f''(x)}{2}$$

ist, wenn f *an der Stelle* x *eine zweite Ableitung besitzt.*

(a) *Wenn* $f \in E$ *gilt und für alle* $x \in (c, d)$

$$\beta_n \mid r_n(f, x)| \leqslant M \cdot s(x) \tag{3.11}$$

für (unendlich viele) $n \in \mathbf{N}$, *besitzt* f *eine stetige Ableitung* $f' \in \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ *auf* $[c, d]$.

(b) *Ist* $f \in E$ *und*

$$\varliminf_{n\to\infty} \beta_n r_n(f, x) = 0 \tag{3.12}$$

für jedes $x \in (c, d)$, *sowie mit einer geeigneten Konstanten* S *für (unendlich viele)* $n \in \mathbf{N}$

$$\beta_n \mid r_n(f, x)| \leqslant S \cdot s(x), \quad x \in (c, d),$$

ist f *linear auf* $[c, d]$:

$$f(x) = Ax + B, x \in [c, d],$$

mit geeigneten reellen Zahlen A *und* B.

Beweis indirekt. Im wesentlichen wird die Methode aus der Arbeit von B. Bajšanski und R. Bojanič [8] benutzt. (a) (1) $E = C[a, b]$. Wird in der Ungleichung (3.9) auf beiden Seiten das Voronowskaja-Theorem angewendet, führt das auf

$$\alpha s(\eta) + \epsilon_n \leqslant M \cdot s(\eta).$$

Diese Ungleichung enthält wegen $s(\eta) > 0$, $\lim \epsilon_n = 0$ und $\alpha > M$ einen Widerspruch zur Voraussetzung (3.11). Analog ist im Fall (ii) ($\alpha < 0$) zu verfahren.

(2) $E = C^*$. Wenn $f' \notin \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ auf $[c, d]$ ist, kann die nach Lemma 3.7 in einer geeigneten Umgebung $U_\epsilon(\eta)$ definierte Parabel φ periodisch so zu einer Funktion $\psi \in C^*$ fortgesetzt werden, daß $\psi \leqslant f$ bzw. $\psi \geqslant f$ in C^* gilt, je nachdem Fall (i) oder (ii) vorliegt. Wird hier wieder das Voronowskaja-Theorem angewendet, folgt im ersten Fall $\beta_n r_n(\psi, \eta) \leqslant \beta_n r_n(f, \eta)$, also wie unter (1) eine widerspruchsvolle Ungleichung der Form

$$\alpha s(\eta) + \epsilon_n \leqslant M s(\eta).$$

Analog schließt man im Fall (ii).

Wenn insbesondere $u_n \in \mathscr{L}^+(C^*, C^*)$, s konstant positiv ist und (3.12) für ein $f \in C^*$ für alle $x \in \mathbf{R}$ gilt, muß f konstant sein.

(3) $E \subseteq C(X)$, X unbeschränkt. Ist $f' \notin \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ auf $[c, d]$, kann die nach Lemma 3.7 in einer Umgebung $U_\epsilon(\eta)$ definierte Parabel φ als stetige Funktion auf X fortgesetzt werden durch die Definition $\psi : = \min(\varphi, f)$ bzw. $\psi : = \max(\varphi, f)$ im Falle $\alpha > 0$ bzw. $\alpha < 0$, so daß $\psi \in E$ ist. Mit dem Voronowskaja-Theorem erhält man wie bisher in beiden Fällen einen Widerspruch zur Voraussetzung (3.11).

(b) Nach Teil (a) gilt zunächst $f' \in \mathrm{lip}_{2S}\, 1$ auf $[c, d]$. f' ist dann von beschränkter Schwankung auf diesem Intervall, dort also fast überall differenzierbar. Fast überall in $[c, d]$ muß $f''(x) = 0$ sein, sonst ergäbe sich aus der Voraussetzung (3.12) zusammen mit dem Voronowskaja-Theorem sofort ein Widerspruch. Das bedeutet aber: $f' = \text{const}$ in $[c, d]$.

(3.8) und (3.10) verschärfen Sätze von V. G. Amel'kovic [4] und vereinfachen zugleich deren Beweise. Zugleich verallgemeinern (3.8) und (3.10) Aussagen über die Saturationseigenschaften der Bernstein-Operatoren, die von G.G. Lorentz [5] 1963 gemacht wurden, u.a. auf beliebige Operator-Folgen vom Bernsteinschen Typ.

Beispiele. (1) Für die Operatoren $V_n \in \mathscr{L}^+(C^*, C^*)$ von de la Vallée–Poussin

$$V_n(f, x) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{2\pi(2n)!} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n} \frac{t - x}{2}\, dt$$

folgt aus $f \in C^*$ und $\| V_n f - f \|_{[0, 2\pi]} \leqslant (M/n)$ [10] $: f' \in \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ auf $\mathbf{R}$; sowie aus $\| V_n f - f \|_{[0, 2\pi]} = o(1/n)$, $n \to \infty$, daß f konstant ist. Ähnliches gilt für die bekannten Jackson-Operatoren, für Operatoren von Korovkin und viele andere.

[10] $\| \; \|_X$ bezeichnet wie üblich die Supremumnorm.

(2) Ein anderes Beispiel, das insbesondere (für $a_n = 0$) die Bernstein-Operatoren umfaßt, bilden die Operatoren q_n[6]:

$$q_n(f, x; a_n) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) q_{nk}(x, a_n),$$

$$q_{nk}(x, a) = \binom{n}{k} \frac{\varphi_k(x, a)\, \varphi_{n-k}(1 - x, a)}{\varphi_n(1, a)},$$

$$\varphi_k(x, a) = \prod_{i=0}^{k-1} (x + ia).$$

Die Operatoren sind aus $\mathscr{L}^+(E, F)$, $E = C[0, 1]$, $F = C(Y)$, wobei für nichtnegatives a_n $Y = [0, 1]$ zu setzen ist. Wird der Parameter a_n so gewählt, daß $-\alpha/(n - 1) \leqslant a_n \leqslant 0$, $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, gilt, bedeute $Y = [\alpha, 1 - \alpha]$. Die Folge (q_n) ist vom Bernsteinschen Typ und genügt einem Voronowskaja-Theorem in der Form

$$r_n(f, x; a_n) = r_n(p_2, x; a_n)[\tfrac{1}{2}f''(x) + 0(1)],\ n \to \infty,\ x \in Y,^{11}$$

wenn $\lim a_n = 0$ ist und $f \in E$ an der Stelle x eine zweite Ableitung $f''(x)$ besitzt. Hiernach folgt aus $f \in E$ und

$$| r_n(f, x; a_n)| \leqslant M \frac{x(1 - x)}{n} \frac{1 + na_n}{1 + a_n}$$

für alle $x \in Y$ auf diesem Intervall $f' \in \mathrm{lip}_{2M}\, 1$.

(3) Die am Ende des zweiten Abschnittes betrachteten Operatoren $u_n \in \mathscr{L}^+(E, F)$, wobei E als Unterraum von $F = C[0, \infty)$ durch (2.5) definiert wurde, genügen nach 0. Szasz [7] der Relation

$$\lim_{n\to\infty} n(u_n(f, x) - f(x)) = x \frac{f''(x)}{2},$$

wenn $f \in E$ an der Stelle $x \in [0, \infty)$ eine zweite Ableitung besitzt. Ist für ein $f \in E$

$$| u_n(f, x) - f(x)| \leqslant \frac{Mx}{n}, \qquad x \epsilon (c, d) \subseteq (0, \infty), \tag{*}$$

gilt $f' \in \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ auf $[c, d]$. Umgekehrt folgt die Ungleichung (*) auf $[0, \infty)$ nach (2.4) aus der Bedingung $f' \in \mathrm{lip}_{2M}\, 1$ auf $[0, \infty)$. Gilt über (*) hinaus

$$\varliminf_{n\to\infty} n \cdot r_n(f, x) = 0$$

für jedes $x \in (c, d)$, ist f notwendig linear auf $[c, d]$.

[11] $r_n(f, x; a_n) = q_n(f, x; a_n) - f(x)$.

Es erscheint bemerkenswert, daß man die Aussage (b) des Satzes 3.8 für Operator-Folgen vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ beweisen kann. Im Falle $E = F$, wo also Y identisch ist mit dem kompakten Intervall X, kommt man sogar ohne die einschneidende Voraussetzung (3.3) aus.

Die folgenden Sätze verallgemeinern einige Ergebnisse, die B. Bajšanski und R. Bojanič [8] 1964 für die Bernsteinpolynome bewiesen haben.

SATZ 3.13. *Es sei $X = [a, b]$ ein kompaktes Intervall, $E = C(X)$. Weiter sei (u_n) eine Folge von Operatoren $u_n \in \mathscr{L}^+(E, E)$, von denen jeder vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ bzgl. des Čebyšev-Systems (f_0, f_1) auf X ist. (f_0, f_1, f_2) bilde ein Čebyšev-System auf X von Funktionen aus E, so daß*

3.14. *für jedes $x \in (a, b)$ $r_n(f_2, x)$ für unendlich viele $n \in \mathbf{N}$ positiv ist. Dann folgt aus $f \in E$ und*

$$r_n(f, x) = o\{r_n(f_2, x)\}, \quad n \to \infty \tag{3.15}$$

für jedes $x \in \underline{X}$: f ist eine Linearkombination von f_0 und f_1, also ein Fixelement eines jeden Operators.

Genügen die u_n an Stelle von (3.14) *der Bedingung*

3.16— *es gibt eine Folge (β_n) positiver Zahlen und eine Funktion $s \in E$, $s(x) > 0$ für $a < x < b$, so daß in (a, b) $r_n(f_2, x) = \beta_n \cdot s(x)$ ist —, folgt aus $f \in E$ und $\| r_n f \|_{[a,b]} = o(\beta_n)$, $n \to \infty$, daß f eine Linearkombination von f_0 und f_1 ist.*

Die Bedingung (3.16) ist z.B. dann erfüllt, wenn der von f_0, f_1, f_2 aufgespannte Teilraum von E durch jeden Operator u_n in sich abgebildet wird, ohne daß der Operator die Identität ist. Die Differenzierbarkeit der Bilder $u_n f$ zusammen mit $(f_1/f_0)'(x) \neq 0$ für alle $x \in \underline{X}$ stellt (3.14) sicher.

Hiernach folgt z.B., daß ein von der Identität verschiedener Operator $u \in \mathscr{L}^+(E, E)$ des verallgemeinerten Bernsteinschen Typs bzgl. (f_0, f_1), der den durch die Funktionen eines Čebyšev-Systems (f_0, f_1, f_2) erzeugten Teilraum von E in sich abbildet, als Fixelemente genau die Linearkombinationen von f_0 und f_1 besitzt. Hat rf_2 Nullstellen in (a, b), kann es weitere Fixelemente geben. Das zeigen die stetigen, interpolierenden Streckenzüge (vgl. das Bsp. unter Satz 3.9), bei denen jeder Streckenzug mit Ecken höchsten an den vorgeschriebenen Knotenstellen fix bleibt.

Wir können zum Beweis

$$0 < m_0 \leqslant f_0(x) \leqslant m_1, \qquad x \in X, \tag{3.17}$$

annehmen, sonst hätte man f_0 nur durch eine geeignete Linearkombination von f_0 und f_1 zu ersetzen. Neben den u_n betrachten wir die nach (2.3) erzeugten Operatoren $v_n \in \mathscr{L}^+(E, E)$,

$$v_n(f, x) = \frac{u_n(f \cdot f_0, x)}{f_0(x)},$$

von denen jeder vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ bzgl. $(p_0, f_1 \cdot f_0^{-1})$ ist. Setzen wir $r_n(f, x) = u_n(f, x) - f(x)$ und $\bar{r}_n(f, x) = v_n(f, x) - f(x)$, so folgt $\bar{r}_n(f, x) = f_0^{-1}(x)\, r_n(f \cdot f_0, x)$.

LEMMA 3.18. (Bajšanski, Bojanič [8]). *Es sei* $\varphi \in E = C[a, b]$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ *und*

$$\max_{x \in [a,b]} \varphi(x) = M > 0.$$

Dann gibt es zu jedem Čebyšev-System (h_0, h_1, h_2) *auf* $[a, b]$, *wobei* $h_0 = p_0$ *und die Elemente* h_1, h_2 *aus* E *sind, eine Linearkombination* $\psi = \sum_0^2 a_i h_i$ *mit* $a_2 < 0$, *so daß für ein* $c \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \varphi(c) &= \psi(c) && \textit{gilt und} \\ \varphi(x) &\leqslant \psi(x), && \textit{wenn} \quad x \in [a, b]. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Beweis. Wir wählen eine Linearkombination $\psi^* = a_0^* p_0 + a_1 h_1 + a_2 h_2$ mit $a_2 < 0$, die ganz im Streifen $M \leqslant y < \frac{3}{2}M$ verläuft.

$$\min_{x \in [a,b]} [\psi^*(x) - \varphi(x)] = m \geqslant 0$$

wird in einem inneren Punkte $c \in (a, b)$ angenommen. Dann ist $\psi = \psi^* - m p_0$ eine Linearkombination mit der Eigenschaft (3.19).

Zu jedem $g \in E$ läßt sich durch Subtraktion einer geeigneten Linearkombination $a_0 f_0 + a_1 f_1$ eine Funktion $p \in E$ bestimmen, so daß $p(a) = p(b) = 0$ ist. Dabei ist $r_n(g) = r_n(p)$, $\bar{r}_n(g \cdot f_0^{-1}) = \bar{r}_n(p \cdot f_0^{-1})$. Nehmen wir an, $q := p \cdot f_0^{-1}$ besitze auf $[a, b]$ ein positives Maximum. Dann läßt sich nach (3.18) eine Linearkombination $\psi = f_0^{-1} \cdot \sum_0^2 a_i f_i$ mit $a_2 < 0$ angeben, so daß $q(c) = \psi(c)$ für ein $c \in (a, b)$ und $q(x) \leqslant \psi(x)$ ist, wenn $x \in [a, b]$. Daraus folgt $v_n q \leqslant v_n \psi$ in E und für $x = c$

$$\bar{r}_n(q, c) \leqslant \bar{r}_n(\psi, c). \tag{3.20}$$

Nun ist

$$\bar{r}_n(q, c) = \frac{1}{f_0(c)}\, r_n(g, c), \qquad \bar{r}_n(\psi, c) = \frac{a_2}{f_0(c)}\, r_n(f_2, c).$$

Gleichgültig ob g der Bedingung (3.15) oder—wenn (3.14) durch (3.16) ersetzt wird—der Bedingung

$$\| r_n g \|_{[a,b]} = o(\beta_n), \quad n \to \infty$$

genügt, (3.20) enthält stets einen Widerspruch dazu. Genauso wird gezeigt, daß q auf $[a, b]$ kein negatives Minimum besitzt. Also gilt in der Tat $g = a_0 f_0 + a_1 f_1$.

Mit ähnlichen Methoden, wie sie hier und bei Satz (3.8) verwendet wurden, beweist man

SATZ 3.21. *Es seien $X = [a, b]$, $Y = [c, d] \subseteq X$ kompakte Intervalle, $E = C(X)$ und $F = C(Y)$. Wenn die Folge (u_n), $u_n \in \mathscr{L}^+(E, F)$ vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ bzgl. des Čebyšev-Systems (f_0, f_1, f_2) ist, folgt aus $f \in E$ und $r_n(f, x) = o[r_n(f_2, x)]$, $n \to \infty$, für jedes $x \in Y$, daß die Restriktion von f auf Y sich als Linearkombination von f_0 und f_1 darstellen läßt: $f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x)$, $x \in Y$.*

Auch hier darf die Bedingung (3.2) durch die weitergehende Forderung (3.16) ersetzt werden. Man erhält dann aus $f \in E$ und

$$\| r_n f \|_Y = o(\| r_n f_2 \|_Y), \quad n \to \infty$$

daß die Restriktion von f auf Y linear ist. Z.B. folgt für die oben unter (2) betrachteten Operatoren q_n $(-\alpha/(n-1) \leqslant a_n$, $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$, $\lim a_n = 0)$ aus $f \in C[0, 1]$ und

$$\| r_n f \|_Y = o\left[\max\left(\frac{1}{n}, | a_n |\right)\right], \qquad n \to \infty$$

daß f auf Y linear ist.

4. Operator-Folgen vom Bernsteinschen Typ zeigen relativ schlechte Approximationseigenschaften, was die Approximationsgeschwindigkeit angeht. Andererseits ist von den (speziellen) Bernstein-Operatoren bekannt, daß sie hervorragende "gestaltserhaltende Eigenschaften" besitzen, z.B. jeder auf [0, 1] konvexen Funktion f als Bild $B_n f$ wieder eine konvexe Funktion zuordnen. Genauer liegt $B_n f$ ganz oberhalb $f : f \leqslant B_n f$. Aus $f \in C[0, 1]$ und $f \leqslant B_n f$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt umgekehrt, daß f konvex ist [9]. Diese Eigenschaft bzgl. der verallgemeinerten Konvexität kommt allen Operatoren vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ zu, während es noch unbekannt ist, unter welchen Bedingungen solche Operatoren konvexe Funktionen wieder in konvexe Funktionen transformieren.

SATZ 4.1. *Es seien $X = [a, b]$, $Y = [c, d] \subseteq X$ kompakte Intervalle,*

$E = C(X)$ und $F = C(Y)$. (u_n), $u_n \in \mathscr{L}^+(E, F)$, sei eine Folge des verallgemeinerten Bernsteinschen Typs bzgl. des Čebyšev-Systems (f_0, f_1, f_2) auf X. Es sei $f \in E$. Wenn es zu jedem $x \in \underline{Y}$ ein $n_0(x) \in \mathbf{N}$ gibt, so daß

$$r_n(f, x) \geqslant 0 \tag{4.2}$$

ist für alle $n \geqslant n_0(x)$, ist f konvex auf Y bzgl. des Čebyšev-Systems (f_0, f_1, f_2).

Zum Beweis führen wir wieder die nach (2.3) aus den u_n erzeugten Operatoren v_n ein. Dabei darf vorausgesetzt werden, daß für f_0 die Ungleichung (3.17) gilt. Es genügt dann offensichtlich, den Satz für eine Operator-Folge vom verallgemeinerten Bernsteinschen Typ bzgl. eines Čebyšev-Systems (g_0, g_1, g_2) mit $g_0 = p_0$ zu beweisen. Genau dann, wenn $f \cdot f_0^{-1}$ bzgl. $(p_0, f_1 f_0^{-1}, f_2 f_0^{-1})$ konvex ist auf Y, ist die Funktion f bzgl. (f_0, f_1, f_2) konvex, weil die dividierten Differenzen von $f \cdot f_0^{-1}$ bzgl. des ersten Systems und die von f bzgl. (f_0, f_1, f_2) identisch sind, wenn dieselben Knoten benutzt werden. In den Voraussetzungen des Satzes (4.1) dürfen wir also für den Beweis $f_0 = p_0$ setzen. Angenommen, f wäre nicht konvex auf Y. Dann gibt es mindestens ein Tripel von Zahlen $x_i \in Y$ mit $x_0 < x_1 < x_2$, so daß $[x_0, x_1, x_2; f] < 0$ ist. Wir zeigen: Es existiert mindestens eine Stelle $c \in \underline{Y}$ derart, daß für unendlich viele Indizes $r_n(f, c)$ negativ ist. Und zwar zeigen wir genauer: Es gibt ein $c \in \underline{Y}$ mit

$$r_n(f, c) \leqslant r_n(f_2, c)(b_2 + o(1)), \quad n \to \infty$$

wobei b_2 eine negative Konstante ist.

Es sei h die eindeutig bestimmte Linearkombination von f_0 und f_1, die $h(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 2)$ erfüllt. $\varphi = \sum_0^2 a_i f_i$ interpoliere die Funktion f an den drei Knoten x_i: $\varphi(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2)$. φ ist ebenfalls eindeutig bestimmt. Es ist $[x_0, x_1, x_2; f] = [x_0, x_1, x_2; \varphi] = a_2 < 0$, also φ streng konkav bzgl. (f_0, f_1, f_2) auf X. Weiter ist $f(x_1) \neq h(x_1)$. Man kann sich leicht überlegen, daß $f(x_1) > h(x_1)$ sein muß, käme aber auch ohne diese Tatsache aus. Wir definieren zwei Hilfsfunktionen $h_1, h_2 \in E$ durch

$$h_1(x) := \begin{cases} f(x) - h(x), & x \in [x_0, x_2] \\ 0 & \text{sonst in } X, \end{cases}$$

$h_2 := f - h - h_1$. Dann gilt $h_1(x_0) = h_1(x_2) = 0$,

$$\max_{x \in [x_0, x_2]} h_1(x) > 0$$

und für $x \in Y$ $r_n(f - h, x) = r_n(f, x) = r_n(h_1, x) + r_n(h_2, x)$. Nach Lemma (3.18) gibt es eine Funktion $\chi = \sum_0^2 b_i f_i$ mit $b_2 < 0$, so daß $h_1(c) = \chi(c)$ für ein $c \in (x_0, x_2)$ gilt und $h_1(x) \leqslant \chi(x)$, wenn $x \in [x_0, x_2]$. Durch Addition einer geeigneten Funktion $\vartheta \in E$, die in $[x_0, x_2]$ identisch verschwindet, kann man $h_1 \leqslant \chi + \vartheta$ in E erreichen, so daß $r_n(h_1, c) \leqslant r_n(\chi, c) + r_n(\vartheta, c)$ gilt. Wegen $x_0 < c < x_2$ ist $r_n(h_2, c) = o\{r_n(f_2, c)\}$, $n \to \infty$. Dasselbe gilt für $r_n(\vartheta, c)$. Wir haben also mit $b_2 < 0$ $r_n(f, c) \leqslant r_n(f_2, c)(b_2 + o(1))$, $n \to \infty$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Im Unterschied zu (4.1) wird im folgenden Kriterium verlangt, daß die Reste $r_n f$ für jedes $f \in E$ auf Y punktweise gegen Null streben.

SATZ 4.3. *Unter den Voraussetzungen von* (4.1), *nur* (4.2) *ersetzt durch*

4.4. (a) $f \in E$ *und zu jedem* $x \in Y$ *gebe es ein* $n_0(x) \in \mathbf{N}$, *so daß* $u_n(f, x) \leqslant u_{n-1}(f, x)$ *ist für* $n \geqslant n_0(x)$;

(b) $\lim r_n(f_2, x) = 0$ *für jedes* $x \in \underline{Y}$;

folgt, f *ist konvex auf* Y *bzgl.* (f_0, f_1, f_2).

Aus der Monotonie und der Konvergenz der Folge $(u_n(f, x))$ gegen $f(x)$ für jedes $x \in \underline{Y}$ folgt sofort $r_n(f, x) \geqslant 0$ für jedes $x \in \underline{Y}$, wenn $n \geqslant n_0(x)$ ist. Damit ist (4.3) auf Satz (4.1) zurückgeführt.

LITERATUR

1. P. P. KOROVKIN, "Linear Operators and Approximation Theory," (Engl. Übers. aus dem Russ.), Hindustan Publ. Corp. Delhi, 1960.

2a. T. POPOVICIU, Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur, *Mathematica* (*Cluj*) **10** (1935), 49–54.

2b. T. POPOVICIU, Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse, *Mathematica* (*Cluj*) **1** (24) (1959), 95–142.

3. A. ZYGMUND, "Trigonometrie Series," Vol. I, 2nd ed., Cambridge, 1959.

4. V. G. AMEL'KOVIC, A theorem converse to a theorem of Voronowskaja type, *Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen.* **2** (1966), 67–74.

5. G. G. LORENTZ, Inequalities and the saturation classes of Bernstein polynomials, *in*, "On Approximation Theory," Proceedings of the Conference at Oberwolfach, Basel, 1963.

6. G. MÜHLBACH, Verallgemeinerungen der Bernstein- und der Lagrangepolynome, erscheint demnächst in *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*

7. O. SZASZ, Generalizations of S. Bernstein's Polynomials to the Infinite Interval, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **45** (1950), 239–245.

8. B. BAJŠANSKI, AND R. BOJANIČ, A note on approximation by Bernstein polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.* **70** (1964), 675–677.

9. E. MOLDOVAN, Observations sur la suite des Polynômes de S. N. Bernstein d'une fonction continue, *Mathematica* (*Cluj*) **4** (27) (1962), 289–292.